AG1 - Cvičení III

Tommy Chu

1 Zadání

Nechť $G = (V, E)$ je neorientovaný graf s c komponentami souvislosti. Ukažte, že G obsahuje alespoň $m - n + c$ kružnic.

Lemmata

Věta 1. Přidáním nové hrany do souvislého grafu vznikne alespoň jedna nová kružnice.

Důkaz. Protože je graf souvislý, mezi libovolnými dvěma vrcholy existuje cesta. Přidáním nové hrany vznikne mezi koncovými vrcholy nová cesta (délky 1). Slepením nové cesty a existující cesty, vznikne kružnice, která v původním grafu bez přidané hrany nebyla. □

Věta 2. Souvislý graf má alespoň $m - n + 1$ kružnic.

Důkaz. Je-li graf strom, platí $m = n - 1$, a graf má triviálně alespoň $0 = m - n + 1$ kružnic. V opačném případě má graf díky souvislosti kostru z $n - 1$ hran a jedná se o rozšíření této kostry o $m - (n - 1) = m - n + 1$ hran. Nicméně v důsledku *Věty 1* má strom rozšířený o $m - n + 1$ hran alespoň $m - n + 1$ kružnic. □

Řešení

Nechť $G = (V, E)$ je neorientovaný graf s c komponentami souvislosti: $A_1, A_2, \cdots, A_c$. Označme $n_i = |V(A_i)|$ a $m_i = |E(A_i)|$. Protože jsou komponenty souvislé, z *Věty 2* platí:

$$\text{pro } \forall i \in \{1, 2, ..., c\} \colon A_i \text{ má alespoň } m_i - n_i + 1 \text{ kružnic.}$$

Z toho plyne, že počet kružnic grafu G je alespoň

$$\sum_{i=1}^{c} \Big(m_i - n_i + 1 \Big) = \sum_{i=1}^{c} m_i - \sum_{i=1}^{c} n_i + \sum_{i=1}^{c} 1 = m - n + c.$$

□